



Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Ular Jaring Berlipat

Fery Firmansah

e-mail: feryfirmansah@unwidha.ac.id

*Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Widya Dharma Klaten*

ABSTRACT

Graphs that have odd harmonious labeling properties are called odd harmonious graphs. The purpose of this study to obtain a new graph class construction with its properties, but also to prove that the new graph class has odd harmonious labeling properties. The research method used consisted of several steps namely data research preparations, research investigations and verification of results. The results of this study, we will provide a construction of a new graph class, that is, the pleated net snake graph and its properties. Furthermore, it will be proven that the pleated net snake graph has odd harmonious labeling properties, so that the pleated net snake graph is an odd harmonious graph.

Keywords: net graph, odd harmonious graph, odd harmonious labeling, pleated graph, snake graph.

ABSTRAK

Graf yang mempunyai sifat pelabelan harmonis ganjil disebut sebagai graf harmonis ganjil. Tujuan dari penelitian ini adalah mendapatkan konstruksi kelas graf baru beserta sifat-sifatnya, selain itu juga untuk membuktikan bahwa kelas graf baru tersebut mempunyai sifat pelabelan harmonis ganjil. Metode penelitian yang digunakan terdiri dari beberapa tahapan yaitu persiapan penelitian, investigasi penelitian dan verifikasi hasil. Hasil dari penelitian ini berupa konstruksi definisi kelas graf baru yaitu graf ular jaring berlipat beserta sifat-sifatnya. Lebih lanjut dibuktikan bahwa graf ular jaring berlipat mempunyai sifat pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga graf ular jaring berlipat adalah graf harmonis ganjil.

Kata Kunci: graf harmonis ganjil, graf berlipat, graf jaring, graf ular, pelabelan harmonis ganjil

PENDAHULUAN

Pelabelan graf diperkenalkan oleh Sedlacek tahun 1963, dilanjutkan oleh Rosa tahun 1970. Hasil penelitian tentang teori pelabelan graf, jenis-jenis pelabelan graf, sifat-sifat pelabelan graf, kelas graf yang sudah ditemukan sifat pelabelannya serta aplikasi pelabelan graf dalam berbagai disiplin ilmu baik matematika maupun komputer dikumpulkan secara teratur oleh Gallian (2019). Didalam

Gallian terdapat jenis pelabelan graf berupa pelabelan harmonis dan pelabelan harmonis ganjil. Graham dan Sloane tahun 1980 memperkenalkan pelabelan harmonis dan dilanjutkan tahun 2009 oleh Liang dan Bai tentang pelabelan harmonis ganjil. (Gallian, 2019).

Graf yang memenuhi sifat pelabelan harmonis ganjil yaitu fungsi pelabelan titik bersifat injektif $f: V(G) \rightarrow$



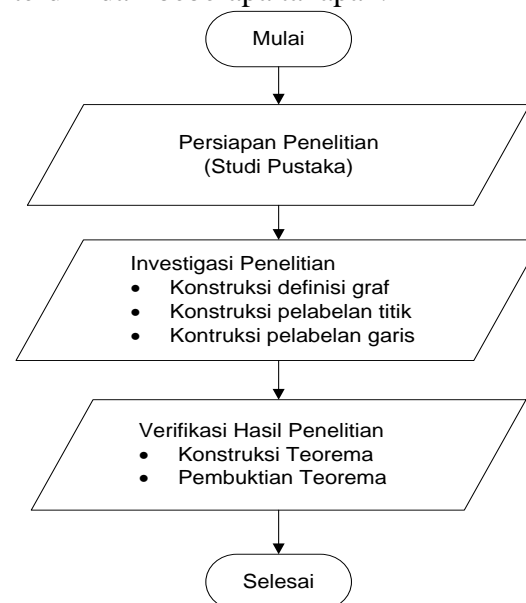
$\{0,1,2,3, \dots, 2q-1\}$ yang menginduksi fungsi pelabelan garis yang bersifat bijektif $f^*: E(G) \rightarrow \{1,3,5,7, \dots, 2q-1\}$ dengan $f^*(ab) = f(a) + f(b)$ disebut sebagai graf harmonis ganjil (Liang & Bai, 2009).

Hasil penelitian yang relevan berupa kelas graf baru yang merupakan graf harmonis ganjil antara lain, Graf dumbel dan graf prisma yang diperumum adalah graf harmonis ganjil (Saputri, Sugeng, & Froncek, 2013), graf shadow dan graf split adalah graf harmonis ganjil (Jeyanthi, Philo, & Sugeng, 2015), graf variasi kincir angin double quadrilateral adalah graf harmonis ganjil (Firmansah, 2017), graf kincir angin belanda berlipat adalah graf harmonis ganjil (Firmansah & Yuwono, 2017a), amalgamasi kincir angin belanda adalah graf harmonis ganjil (Firmansah & Syaifuddin, 2018a), amalgamasi graf kincir angin double quadrilateral adalah graf harmonis ganjil (Firmansah & Syaifuddin, 2018b), kelas graf lingkaran terhubung adalah graf harmonis ganjil (Renuka & Balaganesan, 2018), graf grid adalah graf harmonis ganjil (Jeyanthi, Philo, & Youssef, 2019), graf super subdevisi adalah graf harmonis ganjil (Jeyanthi, Philo, & Siddiqui, 2019), amalgamasi garis dari graf double quadrilateral adalah graf harmonis ganjil (Firmansah & Tasari, 2020)

Graf ular berlipat $kC_4(r)$ dibentuk dari graf ular dengan mengganti graf lingkaran C_4 dengan graf lingkaran berlipat $C_4(r)$, lebih lanjut graf $kC_4(r)$ adalah graf harmonis ganjil (Firmansah, 2016). Graf ular jaring $kL_{3,3}$ dibentuk dari graf jaring $L_{3,3} = P_3 \times P_3$, lebih lanjut graf ular jaring adalah graf harmonis ganjil (Firmansah & Yuwono, 2017b). Berdasarkan dua penelitian tersebut, pada makalah ini peneliti tertarik untuk mengkonstruksi graf ular jaring berlipat $kL_{3,3}(r)$ dan menunjukkan bahwa graf ular jaring berlipat $kL_{3,3}(r)$ adalah graf harmonis ganjil.

BAHAN DAN METODE

Metode penelitian yang digunakan terdiri dari beberapa tahapan.



Gambar 1. Diagram alir metode penelitian

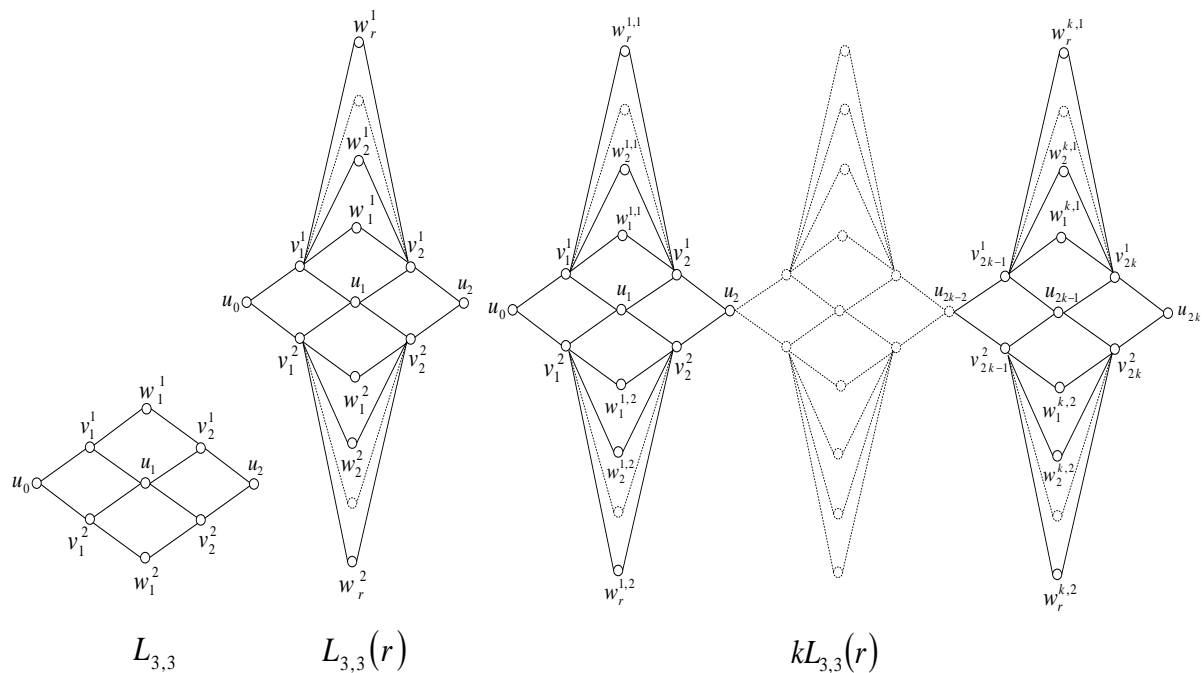
HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut diberikan definisi graf jaring berlipat dan graf ular jaring berlipat beserta notasi titik, notasi garis dan konstruksi gambar.

Definisi 1 Graf jaring berlipat $L_{3,3}(r)$ dengan $r \geq 1$ adalah graf yang dibentuk dari graf jaring $L_{3,3}$, $V(L_{3,3}) = \{u_0, u_1, u_2, v_1^1, v_2^1, w_1^1, v_1^2, v_2^2, w_1^2\}$ dengan menambahkan titik baru $w_2^1, w_3^1, \dots, w_r^1$ yang terhubung dengan titik v_1^1 dan v_2^1 dan titik baru $w_2^2, w_3^2, \dots, w_r^2$ yang terhubung dengan titik v_1^2 dan v_2^2

Definisi 2 Graf ular jaring berlipat $kL_{3,3}(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah graf terhubung dengan k blok yang memiliki titik potong blok berupa lintasan dan setiap k blok isomorfik dengan graf jaring berlipat $L_{3,3}(r)$ dengan $r \geq 1$.

Konstruksi dari graf jaring $L_{3,3}$, graf jaring berlipat $L_{3,3}(r)$ dan graf ular jaring berlipat $kL_{3,3}(r)$ terlihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Konstruksi dari graf $L_{3,3}$, $L_{3,3}(r)$ dan $kL_{3,3}(r)$

Didapatkan himpunan titik dan garis

$$V(kL_{3,3}(r)) = \{u_i | 0 \leq i \leq 2k\}$$

$$\cup \{v_i^j | 1 \leq i \leq 2k, j = 1, 2\}$$

$$\cup \{w_m^{i,j} | 1 \leq i \leq k, 1 \leq m \leq r, j = 1, 2\}$$

dan

$$E(kL_{3,3}(r))$$

$$= \{u_i v_{(i+1)}^j | 0 \leq i \leq 2k - 1, j = 1, 2\}$$

$$\cup \{v_i^j u_i | 1 \leq i \leq 2k, j = 1, 2\}$$

$$\cup \{v_{(2i-1)}^j w_m^{i,j} | 1 \leq i \leq k, 1 \leq m \leq r, j = 1, 2\}$$

$$\cup \{w_m^{i,j} v_{(2i)}^j | 1 \leq i \leq k, 1 \leq m \leq r, j = 1, 2\}$$

Berikut diberikan sifat yang menyatakan bahwa graf ular jaring berlipat adalah graf harmonis ganjil.

Teorema 3 Graf ular jaring berlipat $kL_{3,3}(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil.

BUKTI. Berdasarkan definisi graf ular jaring berlipat $kL_{3,3}(r)$ diperoleh order $p = |V(kL_{3,3}(r))| = 2rk + 9k - 1$ dan size $q = |E(kL_{3,3}(r))| = 4rk + 8k$.

Definisikan fungsi pelabelan titik

$$f: V(kL_{3,3}(r)) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, 8rk + 16k - 1\}$$

$$f(u_i) = 4i, 0 \leq i \leq 2k \quad (1)$$

$$f(v_i^j) = 4i + 2j - 5, \quad 1 \leq i \leq 2k, j = 1, 2 \quad (2)$$

$$f(w_s^{i,j}) = (8r + 16)k + 8m - (8r + 8)i - 4j + 6, \quad 1 \leq i \leq k, 1 \leq m \leq r, j = 1, 2 \quad (3)$$

Berdasarkan (1), (2), dan (3) diperoleh himpunan titik yang telah diberi label sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 f\left(V\left(kL_{3,3}(r)\right)\right) &= \{0,4,8,12, \dots, 8k\} \cup \{1,5,9, \dots, 8k-3, 3, 7, 11, \dots, 8k-1\} \\
 &\cup \left\{ \begin{array}{l} 8rk + 16k - 8r + 2, 8rk + 16k - 8r + 10, 8rk + 16k - 8r + 18, \\ 8rk + 16k - 8r + 26, \dots, 8rk + 16k - 6, \\ 8rk + 16k - 8r - 2, 8rk + 16k - 8r + 6, 8rk + 16k - 8r + 14, \\ 8rk + 16k - 8r + 22, \dots, 8rk + 16k - 10, \\ 8rk + 16k - 16r - 6, 8rk + 16k - 16r + 2, 8rk + 16k - 16r + 10, \\ 8rk + 16k - 16r + 18, \dots, 8rk + 16k - 8r - 14, \\ 8rk + 16k - 16r - 10, 8rk + 16k - 16r - 2, 8rk + 16k - 16r + 6, \\ 8rk + 16k - 16r + 14, \dots, 8rk + 16k - 8r - 18, \\ 8rk + 16k - 24r - 14, 8rk + 16k - 24r - 6, 8rk + 16k - 24r + 2, \\ 8rk + 16k - 24r + 10, \dots, 8rk + 16k - 16r - 22, \\ 8rk + 16k - 24r - 18, 8rk + 16k - 24r - 10, 8rk + 16k - 24r - 2, \\ 8rk + 16k - 24r + 6, \dots, 8rk + 16k - 16r - 26, \\ \dots, \\ 8k + 10, 8k + 18, 8k + 26, 8k + 34, \dots, 8k + 8r + 2, \\ 8k + 6, 8k + 14, 8k + 22, 8k + 30, \dots, 8k + 8r - 2 \end{array} \right\} \\
 &= \{0,4,8,12, \dots, 8k\} \cup \{1,3,5,7,9,11, \dots, 8k-3, 8k-1\} \\
 &\cup \left\{ \begin{array}{l} 8k + 6, 8k + 10, 8k + 14, 8k + 18, 8k + 22, 8k + 26, \\ 8k + 30, 8k + 34, \dots, 8k + 8r + 2, 8k + 8r - 2, \\ \dots, \\ 8rk + 16k - 24r - 18, 8rk + 16k - 24r - 14, 8rk + 16k - 24r - 10, \\ 8rk + 16k - 24r - 6, 8rk + 16k - 24r - 2, 8rk + 16k - 24r + 2, \\ 8rk + 16k - 24r + 6, \dots, 8rk + 16k - 16r - 26, 8rk + 16k - 16r - 22, \\ 8rk + 16k - 16r - 10, 8rk + 16k - 16r - 6, 8rk + 16k - 16r - 2, \\ 8rk + 16k - 16r + 2, 8rk + 16k - 16r + 6, 8rk + 16k - 16r + 10, \\ 8rk + 16k - 16r + 14, \dots, 8rk + 16k - 8r - 18, 8rk + 16k - 8r - 14, \\ 8rk + 16k - 8r - 2, 8rk + 16k - 8r + 2, 8rk + 16k - 8r + 6, \\ 8rk + 16k - 8r + 10, 8rk + 16k - 8r + 14, 8rk + 16k - 8r + 18, \\ 8rk + 16k - 8r + 22, \dots, 8rk + 16k - 10, 8rk + 16k - 6 \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} 0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 8k - 3, 8k - 1, 8k, \\ 8k + 6, 8k + 10, 8k + 14, 8k + 18, 8k + 22, 8k + 26, \\ 8k + 30, 8k + 34, \dots, 8k + 8r + 2, 8k + 8r - 2, \\ \dots, \\ 8rk + 16k - 24r - 18, 8rk + 16k - 24r - 14, 8rk + 16k - 24r - 10, \\ 8rk + 16k - 24r - 6, 8rk + 16k - 24r - 2, 8rk + 16k - 24r + 2, \\ 8rk + 16k - 24r + 6, \dots, 8rk + 16k - 16r - 26, 8rk + 16k - 16r - 22, \\ 8rk + 16k - 16r - 10, 8rk + 16k - 16r - 6, 8rk + 16k - 16r - 2, \\ 8rk + 16k - 16r + 2, 8rk + 16k - 16r + 6, 8rk + 16k - 16r + 10, \\ 8rk + 16k - 16r + 14, \dots, 8rk + 16k - 8r - 18, 8rk + 16k - 8r - 14, \\ 8rk + 16k - 8r - 2, 8rk + 16k - 8r + 2, 8rk + 16k - 8r + 6, \\ 8rk + 16k - 8r + 10, 8rk + 16k - 8r + 14, 8rk + 16k - 8r + 18, \\ 8rk + 16k - 8r + 22, \dots, 8rk + 16k - 10, 8rk + 16k - 6 \end{array} \right\} \\
 &= \{0, 1, 3, 4, \dots, 8rk + 16k - 6\}
 \end{aligned}$$

Diperoleh $f(V(kL_{3,3}(r))) = \{0,1,3,4, \dots, 8rk + 16k - 6\} \subseteq \{0,1,2,3 \dots, 8rk + 16k - 1\}$ dan fungsi f memberikan label yang berbeda pada setiap titik sehingga fungsi pelabelan titik f bersifat injektif.

Didefinisikan fungsi pelabelan garis $f^*: E(kL_{3,3}(r)) \rightarrow \{1,3,5,7, \dots, 8rk + 16k - 1\}$
 $f^*(u_i v_{(i+1)}^j) = 8i + 2j - 1,$
 $0 \leq i \leq 2k - 1, j = 1,2$ (4)

$$f^*(v_i^j u_i) = 8i + 2j - 5,$$

$$1 \leq i \leq 2k, j = 1,2 \quad (5)$$

$$f^*(v_{(2i-1)}^j w_m^{i,j}) = (8r + 16)k + 8m - 8ri - 2j - 3, 1 \leq i \leq k,$$

$$1 \leq m \leq r, j = 1,2 \quad (6)$$

$$f^*(w_m^{i,j} v_{(2i)}^j) = (8r + 16)k + 8m - 8ri - 2j + 1, 1 \leq i \leq k,$$

$$1 \leq m \leq r, j = 1,2 \quad (7)$$

Berdasarkan (4), (5), (6) dan (7) diperoleh himpunan garis yang telah diberi label

$$f^*(E(kL_{3,3}(r))) = \{1,9,17,25, \dots, 16k - 7, 3,11,19,27, \dots, 16k - 5\}$$

$$\cup \{5,13,21,29, \dots, 16k - 3, 7,15,23,31, \dots, 16k - 1\}$$

$$\cup \left\{ \begin{array}{l} 8rk + 16k - 8r + 3, 8rk + 16k - 8r + 11, 8rk + 16k - 8r + 19, \\ 8rk + 16k - 8r + 27, \dots, 8rk + 16k - 5, \\ 8rk + 16k - 8r + 1, 8rk + 16k - 8r + 9, 8rk + 16k - 8r + 17, \\ 8rk + 16k - 8r + 25, \dots, 8rk + 16k - 7, \\ 8rk + 16k - 16r + 3, 8rk + 16k - 16r + 11, 8rk + 16k - 16r + 19, \\ 8rk + 16k - 16r + 27, \dots, 8rk + 16k - 8r - 5, \\ 8rk + 16k - 16r + 1, 8rk + 16k - 16r + 9, 8rk + 16k - 16r + 17, \\ 8rk + 16k - 16r + 25, \dots, 8rk + 16k - 8r - 7, \\ 8rk + 16k - 24r + 3, 8rk + 16k - 24r + 11, 8rk + 16k - 24r + 19, \\ 8rk + 16k - 24r + 27, \dots, 8rk + 16k - 16r - 5, \\ 8rk + 16k - 24r + 1, 8rk + 16k - 24r + 9, 8rk + 16k - 24r + 17, \\ 8rk + 16k - 24r + 25, \dots, 8rk + 16k - 16r - 7, \\ \dots, \\ 16k + 3, 16k + 11, 16k + 19, 16k + 27, \dots, 16k + 8r - 5, \\ 16k + 1, 16k + 9, 16k + 17, 16k + 25, \dots, 16k + 8r - 7 \end{array} \right\}$$

$$\cup \left\{ \begin{array}{l} 8rk + 16k - 8r + 7, 8rk + 16k - 8r + 15, 8rk + 16k - 8r + 23, \\ 8rk + 16k - 8r + 31, \dots, 8rk + 16k - 1, \\ 8rk + 16k - 8r + 5, 8rk + 16k - 8r + 13, 8rk + 16k - 8r + 21, \\ 8rk + 16k - 8r + 29, \dots, 8rk + 16k - 3, \\ 8rk + 16k - 16r + 7, 8rk + 16k - 16r + 15, 8rk + 16k - 16r + 23, \\ 8rk + 16k - 16r + 31, \dots, 8rk + 16k - 8r - 1, \\ 8rk + 16k - 16r + 5, 8rk + 16k - 16r + 13, 8rk + 16k - 16r + 21, \\ 8rk + 16k - 16r + 29, \dots, 8rk + 16k - 8r - 3, \\ 8rk + 16k - 24r + 7, 8rk + 16k - 24r + 15, 8rk + 16k - 24r + 23, \\ 8rk + 16k - 24r + 31, \dots, 8rk + 16k - 16r - 1, \\ 8rk + 16k - 24r + 5, 8rk + 16k - 24r + 13, 8rk + 16k - 24r + 21, \\ 8rk + 16k - 24r + 29, \dots, 8rk + 16k - 16r - 3, \\ \dots, \\ 16k + 7, 16k + 15, 16k + 23, 16k + 31, \dots, 16k + 8r - 1, \\ 16k + 5, 16k + 13, 16k + 21, 16k + 29, \dots, 16k + 8r - 3 \end{array} \right\}$$

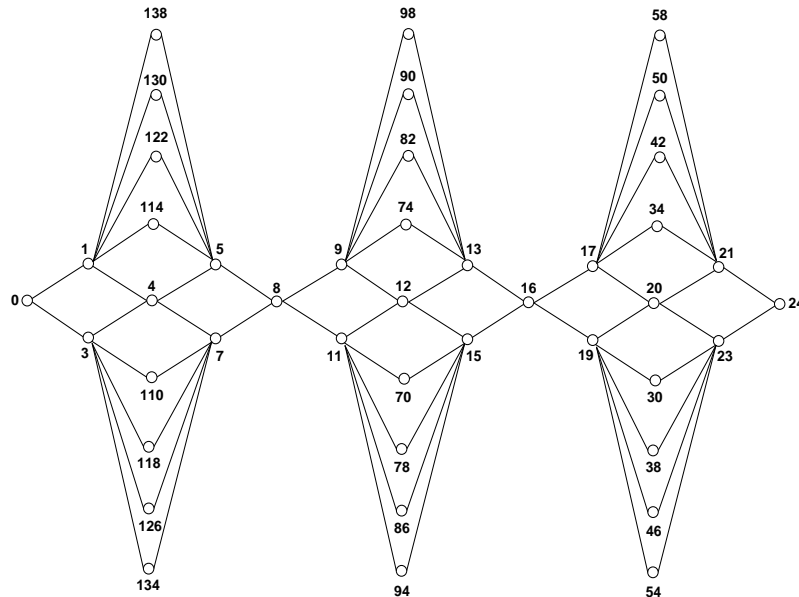
$$= \{1,3,9,11,17,19,25,27, \dots, 16k - 7, 16k - 5\}$$

$$\begin{aligned}
 & \cup \{5, 7, 13, 15, 21, 23, 29, 31, \dots, 16k - 3, 16k - 1\} \\
 & \cup \left\{ \begin{array}{l} 16k + 1, 16k + 3, 16k + 9, 16k + 11, 16k + 17, 16k + 19, 16k + 25, \\ 16k + 27, \dots, 16k + 8r - 7, 16k + 8r - 5, \\ \dots, \\ 8rk + 16k - 24r + 1, 8rk + 16k - 24r + 3, 8rk + 16k - 24r + 9, \\ 8rk + 16k - 24r + 11, 8rk + 16k - 24r + 17, 8rk + 16k - 24r + 19, \\ 8rk + 16k - 24r + 25, \dots, 8rk + 16k - 16r - 7, 8rk + 16k - 16r - 5, \\ 8rk + 16k - 16r + 1, 8rk + 16k - 16r + 3, 8rk + 16k - 16r + 9, \\ 8rk + 16k - 16r + 11, 8rk + 16k - 16r + 17, 8rk + 16k - 16r + 19, \\ 8rk + 16k - 16r + 25, \dots, 8rk + 16k - 8r - 7, 8rk + 16k - 8r - 5, \\ 8rk + 16k - 8r + 1, 8rk + 16k - 8r + 3, 8rk + 16k - 8r + 9, \\ 8rk + 16k - 8r + 11, 8rk + 16k - 8r + 17, 8rk + 16k - 8r + 19, \\ 8rk + 16k - 8r + 25, \dots, 8rk + 16k - 7, 8rk + 16k - 5 \end{array} \right\} \\
 & \cup \left\{ \begin{array}{l} 16k + 5, 16k + 7, 16k + 13, 16k + 15, 16k + 21, 16k + 23, \\ 16k + 29, 16k + 31, \dots, 16k + 8r - 3, 16k + 8r - 1, \\ \dots, \\ 8rk + 16k - 24r + 5, 8rk + 16k - 24r + 7, 8rk + 16k - 24r + 13, \\ 8rk + 16k - 24r + 15, 8rk + 16k - 24r + 21, 8rk + 16k - 24r + 23, \\ 8rk + 16k - 24r + 29, \dots, 8rk + 16k - 16r - 3, 8rk + 16k - 16r - 1, \\ 8rk + 16k - 16r + 5, 8rk + 16k - 16r + 7, 8rk + 16k - 16r + 13, \\ 8rk + 16k - 16r + 15, 8rk + 16k - 16r + 21, 8rk + 16k - 16r + 23, \\ 8rk + 16k - 16r + 29, \dots, 8rk + 16k - 8r - 3, 8rk + 16k - 8r - 1, \\ 8rk + 16k - 8r + 5, 8rk + 16k - 8r + 7, 8rk + 16k - 8r + 13, \\ 8rk + 16k - 8r + 15, 8rk + 16k - 8r + 21, 8rk + 16k - 8r + 23, \\ 8rk + 16k - 8r + 29, \dots, 8rk + 16k - 3, 8rk + 16k - 1 \end{array} \right\} \\
 & = \left\{ \begin{array}{l} 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, \dots, 16k - 7, 16k - 5, 16k - 3, 16k - 1, \\ 16k + 1, 16k + 3, 16k + 5, 16k + 7, 16k + 9, 16k + 11, 16k + 13, \\ 16k + 15, 16k + 17, 16k + 19, 16k + 21, 16k + 23, 16k + 25, 16k + 27, \\ 16k + 29, \dots, 16k + 8r - 7, 16k + 8r - 5, 16k + 8r - 3, 16k + 8r - 1, \\ \dots, \\ 8rk + 16k - 24r + 1, 8rk + 16k - 24r + 3, 8rk + 16k - 24r + 5, \\ 8rk + 16k - 24r + 7, 8rk + 16k - 24r + 9, 8rk + 16k - 24r + 11, \\ 8rk + 16k - 24r + 13, 8rk + 16k - 24r + 15, 8rk + 16k - 24r + 17, \\ 8rk + 16k - 24r + 19, 8rk + 16k - 24r + 21, 8rk + 16k - 24r + 23, \\ 8rk + 16k - 24r + 25, 8rk + 16k - 24r + 27, \dots, 8rk + 16k - 16r - 7, \\ 8rk + 16k - 16r - 5, 8rk + 16k - 16r - 3, 8rk + 16k - 16r - 1, \\ 8rk + 16k - 16r + 1, 8rk + 16k - 16r + 3, 8rk + 16k - 16r + 5, \\ 8rk + 16k - 16r + 7, 8rk + 16k - 16r + 9, 8rk + 16k - 16r + 11, \\ 8rk + 16k - 16r + 13, 8rk + 16k - 16r + 15, 8rk + 16k - 16r + 17, \\ 8rk + 16k - 16r + 19, 8rk + 16k - 16r + 21, 8rk + 16k - 16r + 23, \\ 8rk + 16k - 16r + 25, 8rk + 16k - 16r + 27, \dots, 8rk + 16k - 8r - 7, \\ 8rk + 16k - 8r - 5, 8rk + 16k - 8r - 3, 8rk + 16k - 8r - 1, \\ 8rk + 16k - 8r + 1, 8rk + 16k - 8r + 3, 8rk + 16k - 8r + 5, \\ 8rk + 16k - 8r + 7, 8rk + 16k - 8r + 9, 8rk + 16k - 8r + 11, \\ 8rk + 16k - 8r + 13, 8rk + 16k - 8r + 15, 8rk + 16k - 8r + 17, \\ 8rk + 16k - 8r + 19, 8rk + 16k - 8r + 21, 8rk + 16k - 8r + 23, \\ 8rk + 16k - 8r + 25, 8rk + 16k - 8r + 27, \dots, 8rk + 16k - 7, \\ 8rk + 16k - 5, 8rk + 16k - 3, 8rk + 16k - 1 \end{array} \right\} \\
 & = \{1, 3, 5, 7, \dots, 8rk + 16k - 1\}
 \end{aligned}$$

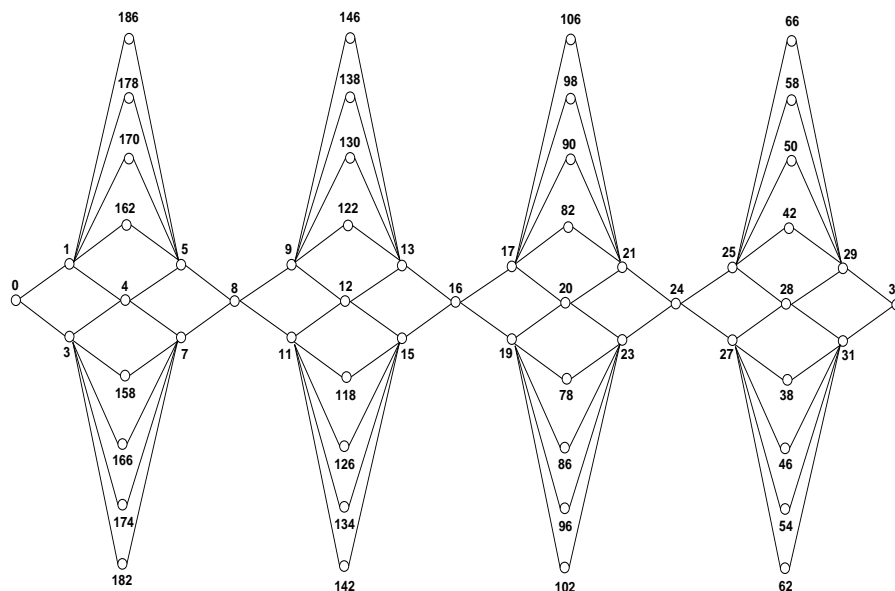
Diperoleh $f^*(E(kL_{3,3}(r))) = \{1,3,5,7, \dots, 8rk + 16k - 1\}$ dan fungsi f^* memberikan label yan berbeda pada setiap garis sehingga fungsi pelabelan garis f^* memenuhi pemetaan bijektif. Akibatnya graf ular jaring berlipat

$kL_{3,3}(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil ■

Contoh 4 Berikut diberikan contoh pelabelan harmonis ganjil pada graf ular jaring berlipat $3L_{3,3}(4)$ (lihat Gambar 3) dan graf ular jaring berlipat $4L_{3,3}(4)$ (lihat Gambar 4).



Gambar 3. Pelabelan harmonis ganjil pada graf ular jaring berlipat $3L_{3,3}(4)$.



Gambar 4. Pelabelan harmonis ganjil pada graf ular jaring berlipat $4L_{3,3}(4)$

KESIMPULAN

Hasil yang diperoleh pada makalah ini berupa konstruksi definisi dari graf ular jaring berlipat yang dinyatakan pada Definisi 2. Selanjutnya telah dibuktikan bahwa graf ular jaring

berlipat adalah graf harmonis ganjil yang dinyatakan pada Teorema 3. Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mencari pelabelan harmonis ganjil pada kelas graf baru yang belum diperoleh sifat-sifat pelabelan harmonis ganjil.

DAFTAR PUSTAKA

- Firmansah, F. (2016). Pelabelan Harmonis Ganjil pada Gabungan Graf Ular dan Graf Ular Berlipat. *Konferensi Nasional Penelitian Matematika Dan Pembelajarannya (KNPMP I)an*, 809–818. Retrieved from https://publikasiilmiah.ums.ac.id/bitstream/handle/11617/7026/88_4_Makalah_Rev_Fery_Firmansah.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Firmansah, F. (2017). The Odd Harmonious Labeling on Variation of the Double Quadrilateral Windmill Graphs. *Jurnal ILMU DASAR*, 18(2), 109. <https://doi.org/10.19184/jid.v18i2.5648>
- Firmansah, F., & Syaifuddin, M. W. (2018a). Pelabelan Harmonis Ganjil pada Amalgamasi Graf Kincir Angin Belanda. *Fibonacci Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*. <https://doi.org/https://doi.org/10.24853/fbc.4.1.37-46>
- Firmansah, F., & Syaifuddin, M. W. (2018b). Pelabelan Harmonis Ganjil pada Amalgamasi Graf Kincir Angin Double Quadrilateral. *Seminar Nasional Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan*, 6. Retrieved from <http://seminar.uad.ac.id/index.php/semidikmad/article/view/402>
- Firmansah, F., & Tasari. (2020). Odd Harmonious Labeling on Edge Amalgamation from Double Quadrilateral Graphs. *Desimal: Jurnal Matematika*, 3(1), 65–72. <https://doi.org/10.24042/djm.v3i1.5712>
- Firmansah, F., & Yuwono, M. R. (2017a). Odd Harmonious Labeling on Pleated of the Dutch Windmill Graphs. *Cauchy Jurnal Matematika Murni Dan Aplikasi*, 4(4), 161–166. <https://doi.org/10.18860/ca.v4i4.4043>
- Firmansah, F., & Yuwono, M. R. (2017b). Pelabelan Harmonis Ganjil pada Kelas Graf Baru Hasil Operasi Cartesian Product. *Jurnal Matematika Mantik*, 3(2), 87–95. <https://doi.org/10.15642/mantik.2017.3.2.87-95>
- Gallian, J. A. (2019). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 18.
- Jeyanthi, P., Philo, S., & Siddiqui, M. K. (2019). Odd harmonious labeling of super subdivision graphs. *Proyecciones*, 38(1), 1–11. <https://doi.org/10.4067/S0716-09172019000100001>
- Jeyanthi, P., Philo, S., & Sugeng, K. A. (2015). Odd harmonious labeling of some new families of graphs. *SUT Journal of Mathematics*. <https://doi.org/10.1016/j.endm.2015.05.024>
- Jeyanthi, P., Philo, S., & Youssef, M. Z. (2019). Odd harmonious labeling of grid graphs. *Proyecciones*, 38(3), 412–416. <https://doi.org/10.22199/issn.0717-6279-2019-03-0027>
- Liang, Z., & Bai, Z. (2009). On The Odd Harmonious Graphs with Applications. *J. Appl. Math. Comput.*, 29, 105–116.
- Renuka, J., & Balaganesan, P. (2018). Odd harmonious labeling of some classes of cycle related graphs. *Indian Journal of Public Health Research and Development*, 9(9), 403–408. <https://doi.org/10.5958/0976-5506.2018.01032.X>
- Saputri, G. A., Sugeng, K. A., & Froncek, D. (2013). The odd harmonious labeling of dumbbell and generalized prism graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 10(2), 221–228.